3.6. Rastav na parcijalne razlomke

20. 11. 2020.

Fotografija: Paul Einerhand

1. korak

(Npr. dijeljenjem polinoma s ostatkom) svaka racionalna funkcija r može se zapisati u obliku

$$r(x) = \text{polinom} + \underbrace{\frac{p(x)}{q(x)}}_{\substack{\textbf{prava}\ \text{racionalna funkcija,} \\ \text{tj. } p=0 \text{ ili } \deg p < \deg q.}}$$

Primjer

$$\frac{x^5 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 1} = x^2 + 1 + \frac{2}{x^3 - 1}.$$

2. korak

Faktoriziramo nazivnik funkcije $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, tj. zapišemo

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{A(x+B_1)^{k_1}\cdots(x+B_n)^{k_n}(x^2+C_1x+D_1)^{l_1}\cdots(x^2+C_mx+D_m)^{l_m}}$$

tako da vrijedi:

- $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $x+B_1, \ \ldots, \ x+B_n$ su međusobno različiti linearni polinomi.
- $x^2+C_1x+D_1, \ \ldots, \ x^2+C_mx+D_m$ su međusobno različiti kvadratni polinomi bez realnih nultočaka, tj. diskriminante < 0.
- $k_1, \ldots, k_n, l_1, \ldots, l_m \in \mathbb{N}$.

Primjer

$$\frac{2}{x^3-1} = \frac{2}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

3. korak: Teorem

$\dfrac{p(x)}{q(x)}$ se rastavlja u sumu **parcijalnih razlomaka**:

$$
\begin{aligned}
\frac{p(x)}{q(x)} = & \frac{*}{x+B_1} + \frac{*}{(x+B_1)^2} + \dots + \frac{*}{(x+B_1)^{k_1}} \\
& + \frac{*}{x+B_2} + \frac{*}{(x+B_2)^2} + \dots + \frac{*}{(x+B_2)^{k_2}} \\
& + \dots \\
& + \frac{*}{x+B_n} + \frac{*}{(x+B_n)^2} + \dots + \frac{*}{(x+B_n)^{k_n}} \\
& + \frac{*x+*}{x^2+C_1x+D_1} + \frac{*x+*}{(x^2+C_1x+D_1)^2} + \dots + \frac{*x+*}{(x^2+C_1x+D_1)^{l_1}} \\
& + \dots \\
& + \frac{*x+*}{x^2+C_mx+D_m} + \frac{*x+*}{(x^2+C_mx+D_m)^2} + \dots + \frac{*x+*}{(x^2+C_mx+D_m)^{l_m}}
\end{aligned}
$$

za jedinstven izbor realnih koeficijenata $*$.

Primjer

Po Teoremu je

$$\frac{2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

za neke $A, B, C \in \mathbb{R}$. Odavde se lako izračuna da je

$$A = \frac{2}{3}, \ B = -\frac{2}{3}, \ C = -\frac{4}{3}.$$

Primjer

Sve zajedno:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^5 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 1} &= x^2 + 1 + \frac{2}{x^3 - 1} \\
&= x^2 + 1 + \frac{2}{(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)} \\
&= x^2 + 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{x+2}{x^2 + x + 1}.
\end{aligned}
$$

Malo kompliciraniji primjer

$$\frac{x}{2x^2(x-1)(x+2)^3\left(x^2-x+1\right)^4\left(x^2+2x+7\right)(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$$
$$+ \frac{C}{x-1}$$
$$+ \frac{D}{x+2} + \frac{E}{(x+2)^2} + \frac{F}{(x+2)^3}$$
$$+ \frac{Gx+H}{x^2-x+1} + \frac{Ix+J}{\left(x^2-x+1\right)^2} + \frac{Kx+L}{\left(x^2-x+1\right)^3} + \frac{Mx+N}{\left(x^2-x+1\right)^4}$$
$$+ \frac{Ox+P}{x^2+2x+7}$$
$$+ \frac{Rx+S}{x^2+1} + \frac{Tx+U}{\left(x^2+1\right)^2}$$

za jedinstven izbor koeficijenata $A, B, C, \ldots, U \in \mathbb{R}$.

Zadatak 33

Odredite rastav na parcijalne razlomke funkcije $f(x) := \dfrac{1}{(x+1)^2\,(x^2+1)}$.

Zadatak 33

Odredite rastav na parcijalne razlomke funkcije $f(x) := \dfrac{1}{(x+1)^2\,(x^2+1)}$.

Rješenje. Po Teoremu je

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2\,(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \tag{1}$$

za jedinstven izbor koeficijenata $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Zadatak 33

Odredite rastav na parcijalne razlomke funkcije $f(x) := \dfrac{1}{(x+1)^2\,(x^2+1)}$.

Rješenje. Po Teoremu je

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2\,(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \tag{1}$$

za jedinstven izbor koeficijenata $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Množenjem (1) sa $(x+1)^2\left(x^2+1\right)$ dobivamo

$$A(x+1)\left(x^2+1\right) + B\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x+1)^2 = 1,$$

Zadatak 33

Odredite rastav na parcijalne razlomke funkcije $f(x) := \dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

Rješenje. Po Teoremu je

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \tag{1}$$

za jedinstven izbor koeficijenata $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Množenjem (1) sa $(x+1)^2\left(x^2+1\right)$ dobivamo

$$A(x+1)\left(x^2+1\right) + B\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x+1)^2 = 1,$$

tj.
$$(A+C)x^3 + (A+B+2C+D)x^2 + (A+C+2D)x + A+B+D = 1,$$

Zadatak 33

Odredite rastav na parcijalne razlomke funkcije $f(x) := \dfrac{1}{(x+1)^2\,(x^2+1)}$.

Rješenje. Po Teoremu je

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2\,(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \tag{1}$$

za jedinstven izbor koeficijenata $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Množenjem (1) sa $(x+1)^2\left(x^2+1\right)$ dobivamo

$$A(x+1)\left(x^2+1\right) + B\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x+1)^2 = 1,$$

tj. $$(A+C)x^3 + (A+B+2C+D)x^2 + (A+C+2D)x + A+B+D = 1,$$

što je ekvivalentno sustavu $$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B+2C+D=0 \\ A+C+2D=0 \\ A+B+D=1 \end{cases},$$

Zadatak 33

Odredite rastav na parcijalne razlomke funkcije $f(x) := \dfrac{1}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}$.

Rješenje. Po Teoremu je

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \tag{1}$$

za jedinstven izbor koeficijenata $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Množenjem (1) sa $(x+1)^2\left(x^2+1\right)$ dobivamo

$$A(x+1)\left(x^2+1\right) + B\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x+1)^2 = 1,$$

tj. $$(A+C)x^3 + (A+B+2C+D)x^2 + (A+C+2D)x + A+B+D = 1,$$

što je ekvivalentno sustavu $\begin{cases} A+C=0 \\ A+B+2C+D=0 \\ A+C+2D=0 \\ A+B+D=1 \end{cases}$, čije je rješenje $\begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \\ C=-\frac{1}{2} \\ D=0 \end{cases}$.

Zadatak 33

Odredite rastav na parcijalne razlomke funkcije $f(x) := \dfrac{1}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}$.

Rješenje. Po Teoremu je

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \tag{1}$$

za jedinstven izbor koeficijenata $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Množenjem (1) sa $(x+1)^2\left(x^2+1\right)$ dobivamo

$$A(x+1)\left(x^2+1\right) + B\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x+1)^2 = 1,$$

tj. $$(A+C)x^3 + (A+B+2C+D)x^2 + (A+C+2D)x + A+B+D = 1,$$

što je ekvivalentno sustavu $\begin{cases} A+C=0 \\ A+B+2C+D=0 \\ A+C+2D=0 \\ A+B+D=1 \end{cases}$, čije je rješenje $\begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \\ C=-\frac{1}{2} \\ D=0 \end{cases}$.

Dakle, $$f(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}.$$